# 2024年重庆市中考数学试题B卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

## 一、单选题

1．下列各数中最小的数是（　　）

A．$-1$　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】A

【分析】根据正数大于0，0大于负数，即可作出判断．

【详解】$-1$是负数，其他三个数均是非负数，故$-1$是最小的数；

故选：A．

【点睛】本题考查了有理数大小的比较：负数小于一切非负数，明确此性质是关键．

2．下列标点符号中，是轴对称图形的是（　　）

A．！　　B．，　　C．；　　D．？

【答案】A

【分析】本题考查轴对称图形的识别．解题的关键是理解轴对称的概念（如果一个平面图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴），寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合．据此对各选项逐一进行判断即可．

【详解】解：A．该标点符号是轴对称图形，故此选项符合题意；

B．该标点符号不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

C．该标点符号不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

D．该标点符号不是轴对称图形，故此选项不符合题意．

故选：A．

3．反比例函数$y=-\frac{10}{x}$的图象一定经过的点是（　　）

A．$(1,10)$　　B．$(-2,5)$　　C．$(2,5)$　　D．$(2,8)$

【答案】B

【分析】本题考查了求反比例函数值．熟练掌握求反比例函数值是解题的关键．分别将各选项的点坐标的横坐标代入，求纵坐标，然后判断作答即可．

【详解】解：解：当$x=1$时，$y=-\frac{10}{1}=-10$，图象不经过$(1,10)$，故A不符合要求；

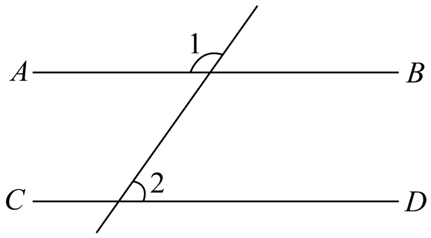
当$x=-2$时，$y=-\frac{10}{-2}=5$，图象一定经过$(-2,5)$，故B符合要求；

当$x=2$时，$y=-\frac{10}{2}=-5$，图象不经过$(2,5)$，故C不符合要求；

当$x=2$时，$y=-\frac{10}{2}=-5$，图象不经过$(2,8)$，故D不符合要求；

故选：B．

4．如图，$AB\,//\,CD$，若$\angle 1=125^\circ$，则$\angle 2$的度数为（　　）

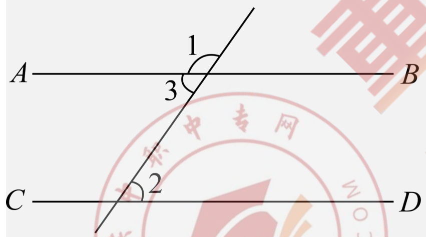



A．$35^\circ$　　B．$45^\circ$　　C．$55^\circ$　　D．$125^\circ$

【答案】C

【分析】本题考查了平行线的性质，邻补角的定义，根据邻补角的定义求出$\angle 3$，然后根据平行线的性质求解即可．

【详解】解：如图，




$\because \angle 1=125^\circ$，

$\therefore \angle 3=180^\circ-\angle 1=55^\circ$，

$\because AB\,//\,CD$，

$\therefore \angle 2=\angle 3=55^\circ$，

故选：C．

5．若两个相似三角形的相似比为$1:4$，则这两个三角形面积的比是（　　）

A．$1:2$　　B．$1:4$　　C．$1:8$　　D．$1:16$

【答案】D

【分析】本题主要考查了相似三角形的性质，根据相似三角形的面积之比等于相似比的平方

进行求解即可.

【详解】解：∵两个相似三角形的相似比为$1:4$，

∴这两个三角形面积的比是$1^2:4^2=1:16$，

故选：D.

6．估计$\sqrt{12}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$的值应在（　　）

A．8 和 9 之间　　B．9 和 10 之间　　C．10 和 11 之间　　D．11 和 12 之间

【答案】C

【分析】本题考查的是二次根式的乘法运算，无理数的估算，先计算二次根式的乘法运算，再估算即可.

【详解】解：∵$\sqrt{12}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{6}+6$，

而$4<\sqrt{24}=2\sqrt{6}<5$，

∴$10<2\sqrt{6}+6<11$，

故答案为：C

7．用菱形按如图所示的规律拼图案，其中第①个图案中有 2 个菱形，第②个图案中有 5 个菱形，第③个图案中有 8 个菱形，第④个图案中有 11 个菱形，…，按此规律，则第⑧个图案中，菱形的个数是（　　）


A．20　　B．21　　C．23　　D．26

【答案】C

【分析】本题考查了图形类的规律探索，解题的关键是找出规律．利用规律求解．通过观察图形找到相应的规律，进行求解即可.

【详解】解：第①个图案中有$1+3\times\left(1-1\right)+1=2$个菱形，

第②个图案中有$1+3\times\left(2-1\right)+1=5$个菱形，

第③个图案中有$1+3\times\left(3-1\right)+1=8$个菱形，

第④个图案中有$1+3\times\left(4-1\right)+1=11$个菱形，

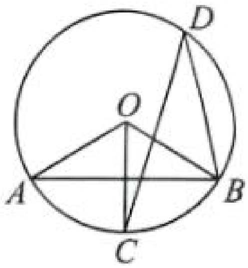
⋮

∴第$n$个图案中有$1+3\left(n-1\right)+1=3n-1$个菱形，

∴第⑧个图案中菱形的个数为$3\times 8-1=23$，

故选：C．

8．如图，$AB$是$\odot O$的弦，$OC\perp AB$交$\odot O$于点$C$，点$D$是$\odot O$上一点，连接$BD$，$CD$．若$\angle D=28^{\circ}$，则$\angle OAB$的度数为（　　）




A．$28^{\circ}$　　B．$34^{\circ}$　　C．$56^{\circ}$　　D．$62^{\circ}$

【答案】B

【分析】本题考查了圆周角定理，等腰三角形的性质等知识，利用圆周角定理求出$\angle COB$，根据等腰三角形的三线合一性质求出$\angle AOB$，等边对等角然后结合三角形内角和定理求解即可．

【详解】解：∵$\angle D=28^{\circ}$，

∴$\angle BOC=2\angle D=56^{\circ}$，

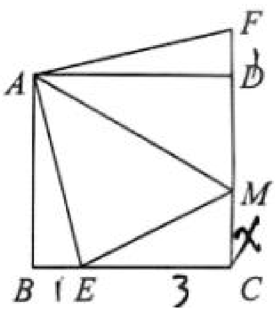
∵$OC\perp AB$，$OA=OB$，

∴$\angle AOB=2\angle BOC=112^{\circ}$，$\angle OAB=\angle OBA$，

∴$\angle OAB=\frac{1}{2}\left(180^{\circ}-\angle AOB\right)=34^{\circ}$，

故选：B．

9．如图，在边长为4的正方形$ABCD$中，点$E$是$BC$上一点，点$F$是$CD$延长线上一点，连接$AE$，$AF$，$AM$平分$\angle EAF$．交$CD$于点$M$．若$BE=DF=1$，则$DM$的长度为（　　）



A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\frac{12}{5}$

【答案】D

【分析】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，勾股定理，先由正方形的性质得到$\angle ABE=\angle ADC=\angle ADF=\angle C=90°$，$AB=AD=CD=BC=4$，再证明$\triangle ABE\cong\triangle ADF(\text{SAS})$得到$AE=AF$，进一步证明$\triangle AEM\cong\triangle AFM(\text{SAS})$得到$EM=FM$，设$DM=x$，则$EM=FM=DF+DM=x+1$，$CM=CD-DM=4-x$，在$\text{Rt}\triangle CEM$中，由勾股定理得$(x+1)^2=3^2+(4-x)^2$，解方程即可得到答案.

【详解】解：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle ABE=\angle ADC=\angle ADF=\angle C=90°$，$AB=AD=CD=BC=4$，

又∵$BE=DF=1$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle ADF(\text{SAS})$，

∴$AE=AF$，

∵$AM$平分$\angle EAF$，

∴$\angle EAM=\angle FAM$，

又∵$AM=AM$，

∴$\triangle AEM\cong\triangle AFM(\text{SAS})$，

∴$EM=FM$，

设$DM=x$，则$EM=FM=DF+DM=x+1$，$CM=CD-DM=4-x$，

在$\text{Rt}\triangle CEM$中，由勾股定理得$EM^2=CE^2+CM^2$，

∴$(x+1)^2=3^2+(4-x)^2$，

解得$x=\frac{12}{5}$，

∴$DM=\frac{12}{5}$，

故选：D.

10．已知整式$M:a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中$n,a_{n-1},\cdots,a_0$为自然数，$a_n$为正整数，且$n+a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=5$．下列说法：

①满足条件的整式$M$中有5个单项式；

②不存在任何一个$n$，使得满足条件的整式$M$有且只有3个；

③满足条件的整式$M$共有16个.

其中正确的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【分析】本题考查的是整式的规律探究，分类讨论思想的应用，由条件可得$0\le n\le 4$，再分类讨论得到答案即可.

【详解】解：∵$n,a_{n-1},\cdots,a_0$为自然数，$a_n$为正整数，且$n+a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=5$，

∴$0\le n\le 4$，

当$n=4$时，则$4+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=5$，

∴$a_4=1$，$a_3=a_2=a_1=a_0=0$，

满足条件的整式有$x^4$，

当$n=3$时，则$3+a_3+a_2+a_1+a_0=5$，

∴$(a_3,a_2,a_1,a_0)=(2,0,0,0)$，$(1,1,0,0)$，$(1,0,1,0)$，$(1,0,0,1)$，

满足条件的整式有：$2x^3$，$x^3+x^2$，$x^3+x$，$x^3+1$，

当$n=2$时，则$2+a_2+a_1+a_0=5$，

∴$(a_2,a_1,a_0)=(3,0,0)$，$(2,1,0)$，$(2,0,1)$，$(1,2,0)$，$(1,0,2)$，$(1,1,1)$，

满足条件的整式有：$3x^2$，$2x^2+x$，$2x^2+1$，$x^2+2x$，$x^2+2$，$x^2+x+1$；

当$n=1$时，则$1+a_1+a_0=5$，

∴$(a_1,a_0)=(4,0)$，$(3,1)$，$(1,3)$，$(2,2)$，

满足条件的整式有：$4x$，$3x+1$，$x+3$，$2x+2$；

当$n=0$时，$0+a_0=5$，

满足条件的整式有：5；

∴满足条件的单项式有：$x^4$，$2x^3$，$3x^2$，$4x$，5，故①符合题意；

不存在任何一个$n$，使得满足条件的整式$M$有且只有3个；故②符合题意；

满足条件的整式$M$共有$1+4+6+4+1=16$个．故③符合题意；

故选 D

## 二、填空题

11．计算：$|-2|+3^0=$______．

【答案】3

【分析】原式第一项利用绝对值的代数意义化简，第二项利用零指数幂法则计算即可得到结果．

【详解】解：原式=2+1=3，

故答案为：3．

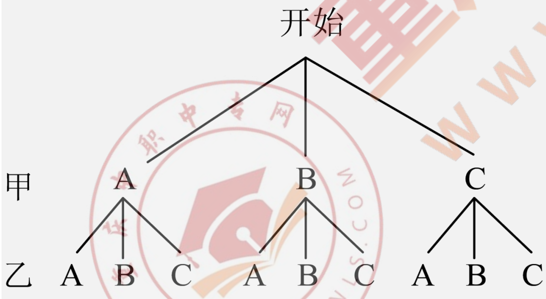
【点睛】此题考查了有理数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

12．甲、乙两人分别从 $A$、$B$、$C$ 三个景区中随机选取一个景区前往游览，则他们恰好选择同一景区的概率为________．

【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】本题考查了列表法与树状图法：画树状图展示所有 9 种等可能的结果数，找出甲、乙恰好游玩同一景点的结果数，然后根据概率公式求解．

【详解】解：画树状图如下：




由图可知，共有 9 种等可能的情况，他们选择同一个景点有 3 种，

故他们选择同一个景点的概率是：$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$．

13．若正多边形的一个外角是 45°，则该正多边形的边数是_________．

【答案】8

【分析】根据多边形外角和是 360 度，正多边形的各个内角相等，各个外角也相等，直接用 $360°\div45°$ 可求得边数．

【详解】解：∵ 多边形外角和是 360 度，正多边形的一个外角是 45°，

$\therefore 360° \div 45° = 8$

即该正多边形的边数是 8，

故答案为：8.

【点睛】本题主要考查了多边形外角和以及多边形的边数，解题的关键是掌握正多边形的各个内角相等，各个外角也相等.

14. 重庆在低空经济领域实现了新的突破. 今年第一季度低空飞行航线安全运行了 200 架次，预计第三季度低空飞行航线安全运行将达到 401 架次. 设第二、第三两个季度安全运行架次的平均增长率为 $x$，根据题意，可列方程为________.

【答案】$200(1+x)^2 = 401$

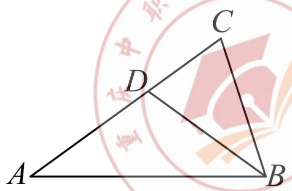
【分析】本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设第二、第三两个季度安全运行架次的平均增长率为 $x$，则第二季度低空飞行航线安全运行了 $200(1+x)$ 架次，第三季度低空飞行航线安全运行了 $200(1+x)^2$ 架次，据此列出方程即可.

【详解】解：设第二、第三两个季度安全运行架次的平均增长率为 $x$，

由题意得，$200(1+x)^2 = 401$，

故答案为：$200(1+x)^2 = 401$.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$，$BD$ 平分 $\angle ABC$ 交 $AC$ 于点 $D$. 若 $BC = 2$，则 $AD$ 的长度为________.




【答案】2

【分析】本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，三角形内角和定理，三角形外角的性质，先根据等边对等角和三角形内角和定理求出 $\angle C = \angle ABC = 72°$，再由角平分线的定义得到 $\angle ABD = \angle CBD = 36°$，进而可证明 $\angle A = \angle ABD$，$\angle BDC = \angle C$，即可推出 $AD = BC = 2$.

【详解】解：∵在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$，

$\therefore \angle C = \angle ABC = \dfrac{180° - \angle A}{2} = 72°$，

∵ $BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=36^\circ$，

$\therefore \angle A=\angle ABD$，$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=72^\circ=\angle C$，

$\therefore AD=BD$，$BD=BC$，

$\therefore AD=BC=2$，

故答案为：2．

16．若关于 $x$ 的一元一次不等式组 $\begin{cases}\frac{2x+1}{3}\le 3\\ 4x-2<3x+a\end{cases}$ 的解集为 $x\le 4$，且关于 $y$ 的分式方程 $\frac{a-8}{y+2}-\frac{y}{y+2}=1$ 的解均为负整数，则所有满足条件的整数 $a$ 的值之和是________．

【答案】12

【分析】本题主要考查了根据分式方程解的情况求参数，根据不等式组的解集求参数，先解不等式组中的两个不等式，再根据不等式组的解集求出 $a>2$；解分式方程得到 $y=\frac{a-10}{2}$，再由关于 $y$ 的分式方程 $\frac{a-8}{y+2}-\frac{y}{y+2}=1$ 的解均为负整数，推出 $a<10$ 且 $a\ne 6$ 且 $a$ 是偶数，则 $2<a<10$ 且 $a\ne 6$ 且 $a$ 是偶数，据此确定符合题意的 $a$ 的值，最后求和即可．

【详解】解：$\begin{cases}\frac{2x+1}{3}\le 3① \\ 4x-2<3x+a②\end{cases}$

解不等式①得：$x\le 4$，

解不等式②得：$x<a+2$，

$\because$ 不等式组的解集为 $x\le 4$，

$\therefore a+2>4$，

$\therefore a>2$；

解分式方程 $\frac{a-8}{y+2}-\frac{y}{y+2}=1$ 得 $y=\frac{a-10}{2}$，

$\because$ 关于 $y$ 的分式方程 $\frac{a-8}{y+2}-\frac{y}{y+2}=1$ 的解均为负整数，

$\therefore \frac{a-10}{2}<0$ 且 $\frac{a-10}{2}$ 是整数且 $y+2=\frac{a-10}{2}+2\ne 0$，

$\therefore a<10$ 且 $a\ne 6$ 且 $a$ 是偶数，

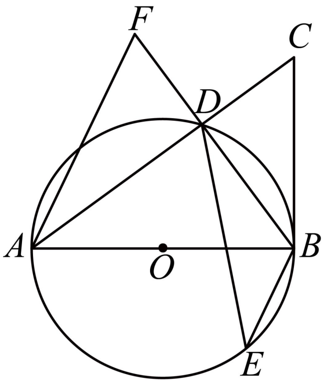
$\therefore 2<a<10$ 且 $a\ne 6$ 且 $a$ 是偶数，

$\therefore$ 满足题意的 $a$ 的值可以为 4 或 8，

$\therefore$ 所有满足条件的整数 $a$ 的值之和是 $4+8=12$．

故答案为：12．

17．如图，$AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$BC$ 是 $\odot O$ 的切线，点 $B$ 为切点．连接 $AC$ 交 $\odot O$ 于点 $D$，点 $E$ 是 $\odot O$ 上一点，连接 $BE$，$DE$，过点A作 $AF \parallel BE$ 交 $BD$ 的延长线于点 $F$．若 $BC=5$，$CD=3$，$\angle F=\angle ADE$，则 $AB$ 的长度是________；$DF$ 的长度是________．




【答案】　$\frac{20}{3}/6\frac{2}{3}$　　$\frac{8}{3}/2\frac{2}{3}$

【分析】由直径所对的圆周角是直角得到 $\angle ADB=\angle BDC=90°$，根据勾股定理求出 $BD=4$，则 $\cos C=\frac{CD}{BC}=\frac{3}{5}$，由切线的性质得到 $\angle ABC=90°$，则可证明 $\angle C=\angle ABD$，解直角三角形即可求出 $AB=\frac{BD}{\cos\angle ABD}=\frac{20}{3}$；连接 $AE$，由平行线的性质得到 $\angle BAF=\angle ABE$，再由 $\angle F=\angle ADE$，$\angle ADE=\angle ABE$，推出 $\angle F=\angle BAF$，得到 $BF=AB=\frac{20}{3}$，则 $DF=BF-BD=\frac{20}{3}-4=\frac{8}{3}$．

【详解】解：∵ $AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ADB=\angle BDC=90°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，由勾股定理得 $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=4$，

∴ $\cos C=\frac{CD}{BC}=\frac{3}{5}$，

∵ $BC$ 是 $\odot O$ 的切线，

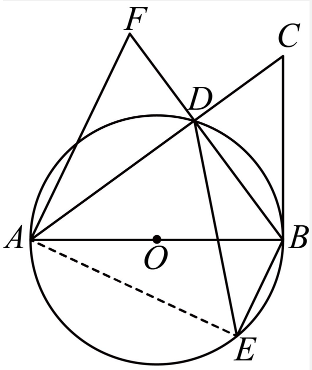
∴ $\angle ABC=90°$，

∴ $\angle C+\angle CBD=\angle CBD+\angle ABD=90°$，

∴ $\angle C=\angle ABD$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=\frac{BD}{\cos\angle ABD}=\frac{4}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{3}$；

如图所示，连接 $AE$，




$\because AF \parallel BE$，

$\therefore \angle BAF = \angle ABE$，

$\because \angle F = \angle ADE$，$\angle ADE = \angle ABE$，

$\therefore \angle F = \angle BAF$，

$\therefore BF = AB = \dfrac{20}{3}$，

$\therefore DF = BF - BD = \dfrac{20}{3} - 4 = \dfrac{8}{3}$；

故答案为：$\dfrac{20}{3}$；$\dfrac{8}{3}$．

【点睛】本题主要考查了切线的性质，同弧所对的圆周角相等，直径所对的圆周角是直角，勾股定理，解直角三角形，等腰三角形的判定等等，证明 $\angle F = \angle BAF$ 是解题的关键．

18．一个各数位均不为 0 的四位自然数 $M = \overline{abcd}$，若满足 $a+d=b+c=9$，则称这个四位数为“友谊数”．例如：四位数 1278，$\because 1+8=2+7=9$，$\therefore$ 1278 是“友谊数”．若 $\overline{abcd}$ 是一个“友谊数”，且 $b-a=c-b=1$，则这个数为________；若 $M=\overline{abcd}$ 是一个“友谊数”，设 $F(M)=\dfrac{M}{9}$，且 $\dfrac{F(M)+\overline{ab}+\overline{cd}}{13}$ 是整数，则满足条件的 $M$ 的最大值是________．

【答案】　3456　　6273

【分析】本题主要考查了新定义，根据新定义得到 $a+d=b+c=9$，再由 $b-a=c-b=1$ 可求出 $a$、$b$、$c$、$d$ 的值，进而可得答案；先求出 $M=999a+90b+99$，进而得到 $\dfrac{F(M)+\overline{ab}+\overline{cd}}{13}=9a+8+\dfrac{3a+b+6}{13}$，根据 $\dfrac{F(M)+\overline{ab}+\overline{cd}}{13}$ 是整数，得到 $9a+8+\dfrac{3a+b+6}{13}$ 是整数，即 $\dfrac{3a+b+6}{13}$ 是整数，则 $3a+b+6$ 是 13 的倍数，求出 $a \le 8$，再按照 $a$ 从大到小的范围讨论求解即可．

【详解】解：$\because \overline{abcd}$ 是一个“友谊数”，

$\therefore a+d=b+c=9$，

又∵ $b-a=c-b=1$，

∴ $b=4$，$c=5$，

∴ $a=3$，$d=6$，

∴这个数为3456；

∵ $M=\overline{abcd}$ 是一个"友谊数"，

∴ $M=1000a+100b+10c+d$

$=1000a+100b+10(9-b)+9-a$

$=999a+90b+99$，

∴ $F(M)=\frac{M}{9}=111a+10b+11$，

∴ $\frac{F(M)+\overline{ab}+\overline{cd}}{13}$

$=\frac{111a+10b+11+10a+b+10c+d}{13}$

$=\frac{111a+10b+11+10a+b+10(9-b)+9-a}{13}$

$=\frac{120a+b+110}{13}$

$=\frac{117a+3a+b+104+6}{13}$

$=9a+8+\frac{3a+b+6}{13}$，

∵ $\frac{F(M)+\overline{ab}+\overline{cd}}{13}$ 是整数，

∴ $9a+8+\frac{3a+b+6}{13}$ 是整数，即 $\frac{3a+b+6}{13}$ 是整数，

∴ $3a+b+6$ 是 13 的倍数，

∵ $a$、$b$、$c$、$d$ 都是不为 0 的正整数，且 $a+d=b+c=9$，

∴ $a\le 8$，

∴当 $a=8$ 时，$31\le 3a+b+6\le 38$，此时不满足 $3a+b+6$ 是 13 的倍数，不符合题意；

当 $a=7$ 时，$28\le 3a+b+6\le 35$，此时不满足 $3a+b+6$ 是 13 的倍数，不符合题意；

当 $a=6$ 时，$25\le 3a+b+6\le 32$，此时可以满足 $3a+b+6$ 是 13 的倍数，即此时 $b=2$，则此时 $d=3$，$c=7$，

∵要使 $M$ 最大，则一定要满足 $a$ 最大，

∴满足题意的 $M$ 的最大值即为6273；

故答案为：3456；6273．

## 三、解答题

19．计算：

(1) $a(3-a)+(a-1)(a+2)$；

(2) $\left(1+\frac{2}{x-2}\right)\div\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$．

【答案】(1) $4a-2$

(2) $\frac{x}{x+2}$

【分析】本题主要考查了整式的混合计算，分式的混合计算：

（1）先根据单项式乘以多项式的计算法则和多项式乘以多项式的计算法则去括号，然后合并同类项即可得到答案；

（2）先把小括号内的式子通分，再把除法变成乘法后约分化简即可得到答案．

【详解】（1）解：$a(3-a)+(a-1)(a+2)$

$=3a-a^2+a^2-a+2a-2$

$=4a-2$；

（2）解：$\left(1+\frac{2}{x-2}\right)\div\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

$=\frac{x-2+2}{x-2}\div\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x}{x-2}\cdot\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x}{x+2}$．

20．数学文化有利于激发学生数学兴趣．某校为了解学生数学文化知识掌握的情况，从该校七、八年级学生中各随机抽取10名学生参加了数学文化知识竞赛，并对数据（百分制）进行整理、描述和分析（成绩均不低于70分，用$x$表示，共分三组：$A$．$90\le x\le 100$，$B$．$80\le x<90$，$C$．$70\le x<80$），下面给出了部分信息：

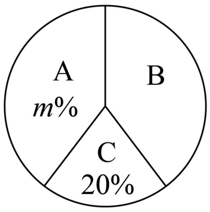
七年级10名学生的竞赛成绩是：76，78，80，82，87，87，87，93，93，97．

八年级10名学生的竞赛成绩在$B$组中的数据是：80，83，88，88．

七、八年级抽取的学生竞赛成绩统计表

| 年级 | 平均数 | 中位数 | 众数 |
|---|---|---|---|
| 七年级 | 86 | 87 | $b$ |
| 八年级 | 86 | $a$ | 90 |

八年级抽取的学生竞赛成绩扇形统计图




根据以上信息，解答下列问题：

(1)填空：$a=$________，$b=$________，$m=$________；

(2)根据以上数据，你认为该校七、八年级中哪个年级学生数学文化知识较好？请说明理由（写出一条理由即可）；

(3)该校七年级学生有 500 人，八年级学生有 400 人．估计该校七、八年级学生中数学文化知识为“优秀”$(x\geq 90)$的总共有多少人？

【答案】(1)88；87；40

(2)八年级学生数学文化知识较好，理由见解析

(3)310 人

【分析】本题主要考查了中位数，众数，用样本估计总体，扇形统计图等等：

（1）根据中位数和众数的定义可求出 $a$、$b$ 的值，先求出把年级 $A$ 组的人数，进而可求出 $m$ 的值；

（2）根据八年级学生成绩的中位数和众数都比七年级学生成绩的高即可得到结论；

（3）用七年级的人数乘以七年级样本中优秀的人数占比求出七年级优秀人数，用八年级的人数乘以八年级样本中优秀的人数占比求出八年级优秀人数，再二者求和即可得到答案．

【详解】（1）解：八年级 $C$ 组的人数为$10\times 20\%=2$人，而八年级 $B$ 组有 4 人，则把八年级 10 名学生的成绩按照从低到高排列，处在第 5 名和第 6 名的成绩分别为 88 分，88 分，

∴八年级学生成绩的中位数$a=\dfrac{88+88}{2}=88$；

∵七年级10名学生成绩中，得分为87分的人数最多，

∴七年级的众数$b=87$；

由题意得，$m\%=\frac{10-4-10\times20\%}{10}\times100\%=40\%$，

∴$m=40$；

故答案为：88；87；40；

（2）解：八年级学生数学文化知识较好，理由如下：

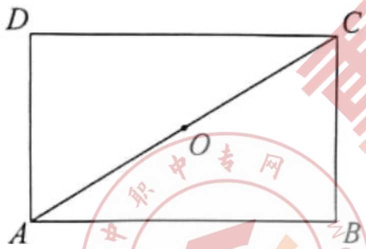
∵两个年级10名学生的平均成绩相同，但是八年级学生成绩的中位数和众数都比七年级学生成绩的高，

∴八年级学生数学文化知识较好；

（3）解：$500\times\frac{3}{10}+400\times40\%=310$人，

∴估计该校七、八年级学生中数学文化知识为“优秀”的总共有310人．

21．在学习了矩形与菱形的相关知识后，小明同学进行了更深入的研究，他发现，过矩形的一条对角线的中点作这条对角线的垂线，与矩形两边相交的两点和这条对角线的两个端点构成的四边形是菱形，可利用证明三角形全等得到此结论．根据他的想法与思路，完成以下作图与填空：




(1)如图，在矩形$ABCD$中，点$O$是对角线$AC$的中点．用尺规过点$O$作$AC$的垂线，分别交$AB$，$CD$于点$E$，$F$，连接$AF$，$CE$．（不写作法，保留作图痕迹）

(2)已知：矩形$ABCD$，点$E$，$F$分别在$AB$，$CD$上，$EF$经过对角线$AC$的中点$O$，且$EF\perp AC$．求证：四边形$AECF$是菱形．

证明：∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$AB\parallel CD$．

∴①，$\angle OCF=\angle OAE$．

∵点$O$是$AC$的中点，

∴②．

∴$\triangle CFO\cong\triangle AEO$（AAS）．

∴③.

又∵ $OA=OC$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∵ $EF\perp AC$，

∴四边形 $AECF$ 是菱形.

进一步思考，如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形呢？请你模仿题中表述，写出你猜想的结论：④.

【答案】(1)见解析

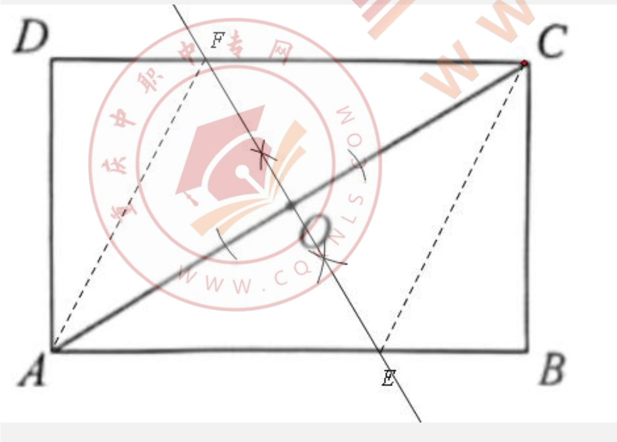
(2)① $\angle OFC=\angle OEA$；② $OA=OC$；③ $OF=OE$；④四边形 $AECF$ 是菱形

【分析】本题主要考查了矩形的性质，平行四边形的性质与判定，菱形的判定，垂线的尺规作图：

（1）根据垂线的尺规作图方法作图即可；

（2）根据矩形或平行四边形的对边平行得到 $\angle OFC=\angle OEA$，$\angle OCF=\angle OAE$，进而证明 $\triangle CFO\cong\triangle AEO(\text{AAS})$，得到 $OF=OE$，即可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形. 再由 $EF\perp AC$，即可证明四边形 $AECF$ 是菱形.

【详解】（1）解：如图所示，即为所求；




（2）证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB\parallel CD$.

∴ $\angle OFC=\angle OEA$， $\angle OCF=\angle OAE$.

∵点 $O$ 是 $AC$ 的中点，

∴ $OA=OC$.

$\therefore \triangle CFO \cong \triangle AEO(\mathrm{AAS})$.

$\therefore OF=OE$.

又$\because OA=OC$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because EF \perp AC$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是菱形.

$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$.

$\therefore \angle OFC=\angle OEA$，$\angle OCF=\angle OAE$.

$\because$点 $O$ 是 $AC$ 的中点，

$\therefore OA=OC$.

$\therefore \triangle CFO \cong \triangle AEO(\mathrm{AAS})$.

$\therefore OF=OE$.

又$\because OA=OC$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because EF \perp AC$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是菱形.

故答案为：①$\angle OFC=\angle OEA$；②$OA=OC$；③$OF=OE$；④四边形 $AECF$ 是菱形.

22．某工程队承接了老旧小区改造工程中 1000 平方米的外墙粉刷任务，选派甲、乙两人分别用 A、$B$ 两种外墙漆各完成总粉刷任务的一半．据测算需要 A、$B$ 两种外墙漆各 300 千克，购买外墙漆总费用为 15000 元，已知 A 种外墙漆每千克的价格比 $B$ 种外墙漆每千克的价格多 2 元．

(1)求 A、$B$ 两种外墙漆每千克的价格各是多少元？

(2)已知乙每小时粉刷外墙面积是甲每小时粉刷外墙面积的$\frac{4}{5}$，乙完成粉刷任务所需时间比甲完成粉刷任务所需时间多 5 小时．问甲每小时粉刷外墙的面积是多少平方米？

【答案】(1) A 种外墙漆每千克的价格为 26 元，则 $B$ 种外墙漆每千克的价格为 24 元.

(2)甲每小时粉刷外墙的面积是 15 平方米.

【分析】本题考查的是分式方程的应用，一元一次方程的应用，理解题意建立方程是解本题

的关键；

（1）设A种外墙漆每千克的价格为$x$元，则$B$种外墙漆每千克的价格为$(x-2)$元，再根据总费用为15000元列方程求解即可；

（2）设甲每小时粉刷外墙面积为$y$平方米，则乙每小时粉刷外墙面积是$\frac{4}{5}y$平方米；利用乙完成粉刷任务所需时间比甲完成粉刷任务所需时间多5小时.从而建立分式方程求解即可.

【详解】（1）解：设A种外墙漆每千克的价格为$x$元，则$B$种外墙漆每千克的价格为$(x-2)$元，

$\therefore 300x+300(x-2)=15000$，

解得：$x=26$，

$\therefore x-2=24$，

答：A种外墙漆每千克的价格为26元，$B$种外墙漆每千克的价格为24元.

（2）设甲每小时粉刷外墙面积为$y$平方米，则乙每小时粉刷外墙面积是$\frac{4}{5}y$平方米；

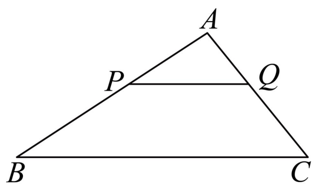
$\therefore \frac{300}{\frac{4}{5}y}-5=\frac{300}{y}$，

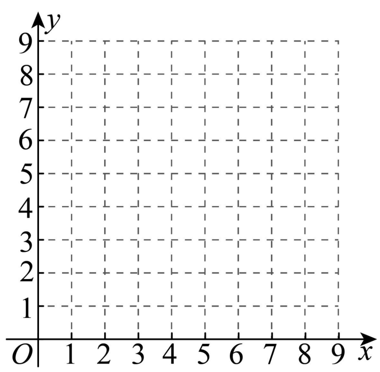
解得：$y=15$，

经检验：$y=15$是原方程的根且符合题意，

答：甲每小时粉刷外墙的面积是15平方米.

23．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=6$，$BC=8$，点$P$为$AB$上一点，过点$P$作$PQ\parallel BC$交$AC$于点$Q$．设$AP$的长度为$x$，点$P$，$Q$的距离为$y_1$，$\triangle ABC$的周长与$\triangle APQ$的周长之比为$y_2$．




(1)请直接写出$y_1$，$y_2$分别关于$x$的函数表达式，并注明自变量$x$的取值范围；

(2)在给定的平面直角坐标系中画出函数$y_1$，$y_2$的图象；请分别写出函数$y_1$，$y_2$的一条性质；

(3)结合函数图象，直接写出 $y_1 > y_2$ 时 $x$ 的取值范围.（近似值保留一位小数，误差不超过0.2）

【答案】(1) $y_1=\frac{4}{3}x\left(0<x\le 6\right)$，$y_2=\frac{6}{x}\left(0<x\le 6\right)$

(2)函数图象见解析，$y_1$随$x$增大而增大，$y_2$随$x$增大而减小

(3) $2.2<x\le 6$

【分析】本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，相似三角形的性质与判定：

（1）证明$\triangle APQ\backsim\triangle ABC$，根据相似三角形的性质得到$\frac{C_{\triangle APQ}}{C_{\triangle ABC}}=\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}$，据此可得答案；

（2）根据（1）所求利用描点法画出对应的函数图象并根据函数图象写出对应的函数图象的性质即可；

（3）找到一次函数图象在反比例函数图象上方时自变量的取值范围即可.

【详解】（1）解：$\because PQ\parallel BC$，

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ABC$，

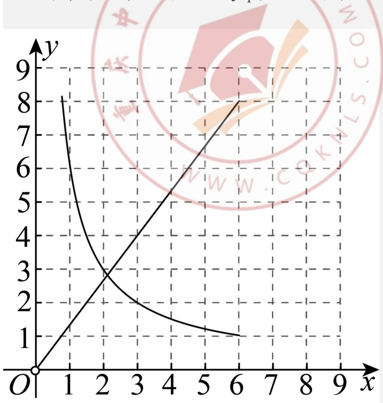
$\therefore \frac{C_{\triangle APQ}}{C_{\triangle ABC}}=\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}$，

$\therefore \frac{y_1}{8}=\frac{x}{6}$，$y_2=\frac{AB}{AP}=\frac{6}{x}$，

$\therefore y_1=\frac{4}{3}x\left(0<x\le 6\right)$，$y_2=\frac{6}{x}\left(0<x\le 6\right)$；

（2）解：如图所示，即为所求；

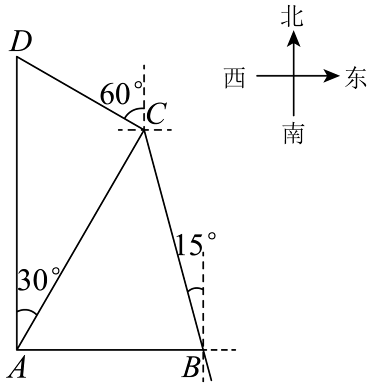
由函数图象可知，$y_1$随$x$增大而增大，$y_2$随$x$增大而减小；




（3）解：由函数图象可知，当$y_1>y_2$时$x$的取值范围$2.2<x\le 6$.

24．如图，A，$B$，$C$，$D$分别是某公园四个景点，$B$在A的正东方向，$D$在A的正北方向，且在$C$的北偏西60°方向，$C$在A的北偏东30°方向，且在$B$的北偏西15°方向，$AB=2$千

米．（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$，$\sqrt{6}\approx 2.45$）




(1)求 $BC$ 的长度（结果精确到 $0.1$ 千米）；

(2)甲、乙两人从景点 $D$ 出发去景点 $B$，甲选择的路线为：$D-C-B$，乙选择的路线为：$D-A-B$．请计算说明谁选择的路线较近？

【答案】(1) 2.5 千米

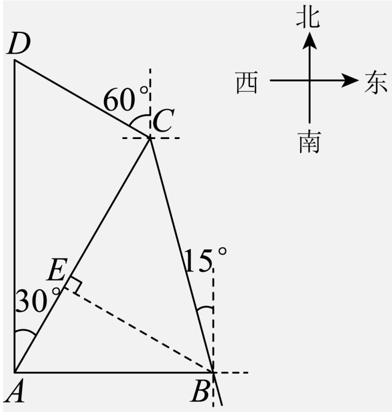
(2)甲选择的路线较近

【分析】本题主要考查了解直角三角形的实际应用：

（1）过点 $B$ 作 $BE\perp AC$ 于 $E$，先求出 $\angle ACB=45^{\circ}$，再解 $Rt\triangle ABE$ 得到 $BE=\sqrt{3}$ 千米，进一步解 $Rt\triangle BCE$ 即可得到 $BC=\dfrac{BE}{\sin\angle BCE}=\sqrt{6}\approx 2.5$ 千米；

（2）过点 $C$ 作 $CF\perp AD$ 于 $D$，先解 $Rt\triangle ABE$ 得到 $AE=1$ 千米，则 $AC=AE+CE=\left(1+\sqrt{3}\right)$ 千米，再 $Rt\triangle AFC$ 得到 $CF=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ 千米，$AF=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ 千米，最后解 $Rt\triangle DCF$ 得到 $DF=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ 千米，$CD=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ 千米，即可得到 $CD+BC=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}+\sqrt{6}\approx 4.03$ 千米，$AD+AB\approx 5.15$ 千米，据此可得答案．

【详解】（1）解：如图所示，过点 $B$ 作 $BE\perp AC$ 于 $E$，




由题意得，$\angle CAB = 90° - 30° = 60°$，$\angle ABC = 90° - 15° = 75°$，

$\therefore \angle ACB = 180° - \angle CAB - \angle ABC = 45°$，

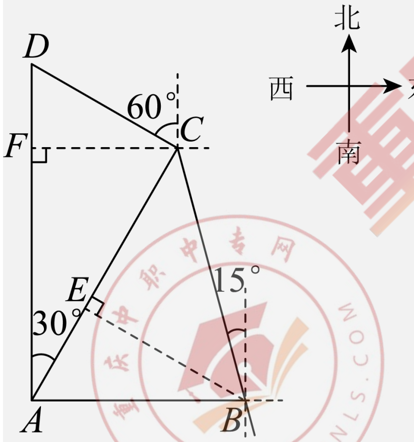
在 $Rt\triangle ABE$ 中，$\angle AEB = 90°$，$AB = 2$ 千米，

$\therefore BE = AB \cdot \cos\angle BAE = 2 \cdot \cos 60° = \sqrt{3}$ 千米，

在 $Rt\triangle BCE$ 中，$BC = \dfrac{BE}{\sin\angle BCE} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 45°} = \sqrt{6} \approx 2.5$ 千米，

$\therefore BC$ 的长度约为 2.5 千米；

（2）解：如图所示，过点 $C$ 作 $CF \perp AD$ 于 $D$，




在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE = AB \cdot \cos\angle BAE = 2 \cdot \cos 60° = 1$ 千米，

$\therefore AC = AE + CE = \left(1 + \sqrt{3}\right)$ 千米，

在 $Rt\triangle AFC$ 中，$CF = AC \cdot \sin\angle CAF = \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \sin 30° = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 千米，

$AF = AC \cdot \cos\angle CAF = \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \cos 30° = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ 千米，

在 $Rt\triangle DCF$ 中，$\angle DCF = 30°$，$\angle DFC = 90°$，

$\therefore DF = CF \cdot \tan\angle DCF = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30° = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6}$ 千米，

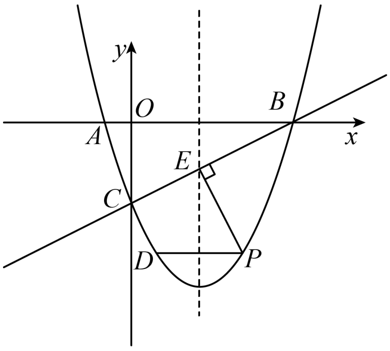
$CD = \dfrac{CF}{\cos\angle DCF} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$千米，

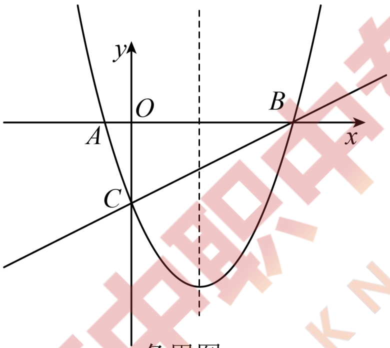
$\therefore CD + BC = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} + \sqrt{6} \approx 4.03$千米，$AD + AB = DF + AF + AB = 2 + \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 5.15$千米，

$\because 4.03 < 5.15$，

$\therefore$甲选择的路线较近．

25．如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y = ax^2 + bx - 3$与$x$轴交于$A(-1,0)$，$B$两点，交$y$轴于点$C$，抛物线的对称轴是直线$x = \dfrac{5}{2}$．




备用图

(1)求抛物线的表达式；

(2)点$P$是直线$BC$下方对称轴右侧抛物线上一动点，过点$P$作$PD \parallel x$轴交抛物线于点$D$，作$PE \perp BC$于点$E$，求$PD + \dfrac{\sqrt{5}}{2}PE$的最大值及此时点$P$的坐标；

(3)将抛物线沿射线$BC$方向平移$\sqrt{5}$个单位，在$PD + \dfrac{\sqrt{5}}{2}PE$取得最大值的条件下，点$F$为点$P$平移后的对应点，连接$AF$交$y$轴于点$M$，点$N$为平移后的抛物线上一点，若$\angle NMF - \angle ABC = 45^\circ$，请直接写出所有符合条件的点$N$的坐标．

【答案】(1) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{2}x - 3$

(2) $PD + \dfrac{\sqrt{5}}{2}PE$最大值为$\dfrac{15}{2}$；$P(5,-3)$；

(3) $N\left(\dfrac{5-\sqrt{73}}{2}, 4-\sqrt{73}\right)$或$\left(1+\sqrt{13}, \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$

【分析】(1) 直接利用待定系数法求解抛物线的解析式即可；

(2) 如图，延长$PE$交$x$轴于$G$，过$P$作$PH \parallel y$轴于$H$，求解$BC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$，可得

$\sin\angle BCO=\dfrac{OB}{BC}=\dfrac{6}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，证明 $PE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}PH$，设 $P\left(x,\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x-3\right)$，$PH=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$，$PD=2x-5$，再建立二次函数求解即可；

（3）由抛物线沿射线 $BC$ 方向平移 $\sqrt{5}$ 个单位，即把抛物线向左平移 2 个单位，再向下平移 1 个单位，可得新的抛物线为：$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-7$，$F(3,-4)$，如图，当 $N$ 在 $y$ 轴的左侧时，过 $N$ 作 $NK\perp y$ 轴于 $K$，证明 $M(0,-1)$，可得 $\angle AMO=\angle OAM=45°=\angle FMK$，证明 $\angle NMK=\angle ABC$，如图，当 $N$ 在 $y$ 轴的右侧时，过 $M$ 作 $y$ 轴的垂线，过 $N'$ 作 $N'T\perp$ 过 $M$ 的垂线于 $T$，同理可得：$\angle N'MT=\angle ABC$，再进一步结合三角函数建立方程求解即可.

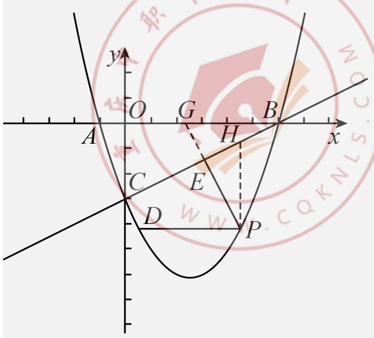
**【详解】**（1）解：∵抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 与 $x$ 轴交于 $A(-1,0)$，$B$ 两点，交 $y$ 轴于点 $C$，抛物线的对称轴是直线 $x=\dfrac{5}{2}$，

∴ $\begin{cases}a-b-3=0\\-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$，

∴ $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x-3$；

（2）解：如图，延长 $PE$ 交 $x$ 轴于 $G$，过 $P$ 作 $PH\,/\!/\,y$ 轴于 $H$，




∵当 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x-3=0$ 时，

解得：$x_1=-1$，$x_2=6$，

∴ $B(6,0)$，

当 $x=0$ 时，$y=-3$，

$\therefore C(0,-3)$，

$\therefore BC=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\angle BCO=\dfrac{OB}{BC}=\dfrac{6}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\because PD\parallel x$轴，

$\therefore \angle PHE=\angle BCO$，

$\therefore \sin\angle PHE=\dfrac{PE}{PH}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore PE=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}PH$，

$\because B(6,0)$，$C(0,-3)$，

设$BC$为$y=mx-3$，

$\therefore 6m-3=0$，解得：$m=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$直线$BC$为：$y=\dfrac{1}{2}x-3$，

设$P\left(x,\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x-3\right)$，

$\therefore H\left(x,\dfrac{1}{2}x-3\right)$，

$\therefore PH=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$，

$\because$抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x-3$的对称轴为直线$x=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore PD=2x-5$，

$\therefore PD+\dfrac{\sqrt{5}}{2}PE=2x-5+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\left(-\dfrac{1}{2}x^2+3x\right)$

$=-\dfrac{1}{2}x^2+5x-5$，

当$x=-\dfrac{5}{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=5$时，$PD+\dfrac{\sqrt{5}}{2}PE$取得最大值，最大值为$\dfrac{15}{2}$；

此时$P(5,-3)$；

（3）解：$\because$抛物线沿射线$BC$方向平移$\sqrt{5}$个单位，即把抛物线向左平移2个单位，再向下平移1个单位，

∴新的抛物线为：$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-7$，$F(3,-4)$，

如图，当$N$在$y$轴的左侧时，过$N$作$NK\perp y$轴于$K$，

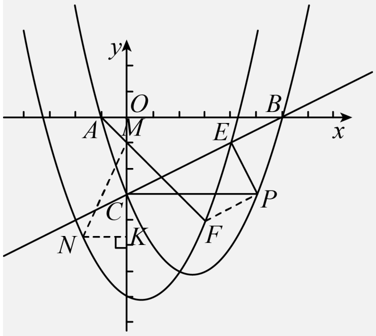
$\because A(-1,0)$，

同理可得：直线$AF$为$y=-x-1$，

当$x=0$时，$y=-1$，

$\therefore M(0,-1)$，

$\therefore \angle AMO=\angle OAM=45°=\angle FMK$，




$\because \angle NMF-\angle ABC=45°$，

$\therefore \angle NMK+45°-\angle ABC=45°$，

$\therefore \angle NMK=\angle ABC$，

$\therefore \tan\angle NMK=\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$，

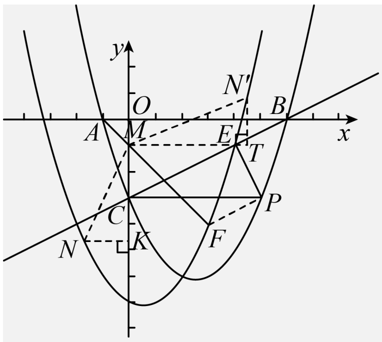
设$N\left(n,\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-7\right)$，

$\therefore \frac{NK}{MK}=\frac{-n}{-1-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+7}=\frac{1}{2}$，

解得：$n=\frac{5-\sqrt{73}}{2}$（不符合题意的根舍去）

$\therefore N\left(\frac{5-\sqrt{73}}{2},4-\sqrt{73}\right)$；

如图，当$N$在$y$轴的右侧时，过$M$作$y$轴的垂线，过$N'$作$N'T\perp$过$M$的垂线于$T$，




同理可得：$\angle N'MT=\angle ABC$，

设 $N'\left(x,\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-7\right)$，则 $T(x,-1)$，

同理可得：$\dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-7+1}{x}=\dfrac{1}{2}$，

∴ $x=1+\sqrt{13}$（不符合题意的根舍去），

∴ $N'\left(1+\sqrt{13},\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

【点睛】本题属于二次函数的综合题，难度很大，考查了待定系数法，二次函数的性质，锐角三角函数的应用，关键是做出合适的辅助线进行转化，清晰的分类讨论是解本题的关键.

26．在 Rt△$ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，过点 $B$ 作 $BD\parallel AC$．

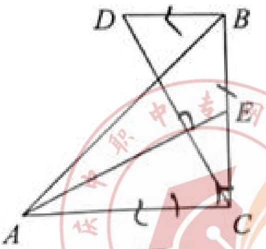


图1

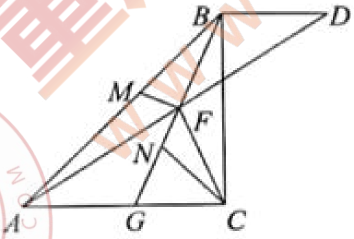
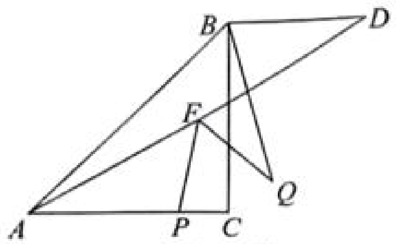


图2



备用图

(1)如图 1，若点 $D$ 在点 $B$ 的左侧，连接 $CD$，过点 A 作 $AE\perp CD$ 交 $BC$ 于点 $E$．若点 $E$ 是 $BC$ 的中点，求证：$AC=2BD$；

(2)如图 2，若点 $D$ 在点 $B$ 的右侧，连接 $AD$，点 $F$ 是 $AD$ 的中点，连接 $BF$ 并延长交 $AC$ 于点 $G$，连接 $CF$．过点 $F$ 作 $FM\perp BG$ 交 $AB$ 于点 $M$，$CN$ 平分 $\angle ACB$ 交 $BG$ 于点 $N$，求证：$AM=CN+\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD$；

(3)若点 $D$ 在点 $B$ 的右侧，连接 $AD$，点 $F$ 是 $AD$ 的中点，且 $AF=AC$．点 $P$ 是直线 $AC$ 上一动点，连接 $FP$，将 $FP$ 绕点 $F$ 逆时针旋转 $60^\circ$ 得到 $FQ$，连接 $BQ$，点 $R$ 是直线 $AD$ 上一动点，连接 $BR$，$QR$．在点 $P$ 的运动过程中，当 $BQ$ 取得最小值时，在平面内将 △$BQR$ 沿直线 $QR$ 翻

折得到$\triangle TQR$，连接$FT$．在点$R$的运动过程中，直接写出$\dfrac{FT}{CP}$的最大值．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

(3)$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$

【分析】（1）证明$\triangle ACE \cong \triangle CBD(\text{ASA})$得到$BD=CE$，再由点$E$是$BC$的中点，得到$BC=2CE=2BD$，即可证明$AC=2BD$；

（2）如图所示，过点$G$作$GH\perp AB$于$H$，连接$HF$，先证明$\triangle AGF \cong \triangle DBF(\text{AAS})$，得到$AG=BD$，$BF=GF$，再证明$\triangle AHG$是等腰直角三角形，得到$AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD$；由直角三角形斜边上的中线的性质可得$FH=FC=BF=\dfrac{1}{2}BG$，则$\angle FBH=\angle FHB$，$\angle FBC=\angle FCB$，进而可证明$\angle HFC=2\angle ABC=90°$，则$\angle HFM=\angle CFN$；设$\angle CBG=x$，则$\angle ABG=45°-x$，$\angle CGB=90°-x$，可得$\angle HMF=\angle BFM+\angle FBM=135°-x$由角平分线的定义可得$\angle GCN=\dfrac{1}{2}\angle ACB=45°$，则可证明$\angle HMF=\angle CNF$，进而证明$\triangle HFM \cong \triangle CFN(\text{AAS})$，得到$HM=CN$，即可证明$AM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD+CN$；

（3）如图所示，过点$D$作$DH\perp AC$交$AC$延长线与$H$，连接$FH$，则四边形$BCHD$是矩形，可得$BC=DH=AC$，证明$\triangle FDH$是等边三角形，得到$\angle DFH=\angle FDH=60°$，进而得到$\angle BDA=\angle DAH=30°$，$\angle FHA=\angle FAH=30°$；由旋转的性质可得$FQ=FP$，$\angle PFQ=60°=\angle DFH$，证明$\triangle DFQ \cong \triangle HFP(\text{SAS})$，得到$\angle FDQ=\angle FHP=30°$，则点$Q$在直线$DQ$上运动，设直线$DQ$交$FH$于$K$，则$DK\perp FH$，$FK=\dfrac{1}{2}FH$，$\angle FDK=\dfrac{1}{2}\angle FDH=30°$，可得$\angle BDQ=60°$，由垂线段最短可知，当$BQ\perp DQ$时，$BQ$有最小值，则$\angle DBQ=30°$，设$AC=DH=6a$，则$AH=\sqrt{3}DH=6\sqrt{3}a$ $BD=CH=6\sqrt{3}a-6a$，则$DQ=3\sqrt{3}a-3a$，$BQ=9a-3\sqrt{3}a$；再求出$FK=3a$，则$DK=3\sqrt{3}a$，$QK=DK-DQ=3a$，由勾股定理得$FQ=3\sqrt{2}a$；由全等三角形的性质可得$PH=DQ=3\sqrt{3}a-3a$，则$CP=3\sqrt{3}a-3a$；由折叠的性质可得

$TQ=BQ=9a-3\sqrt{3}a$，由$FT\le FQ+TQ$，得到当点$Q$在线段$FT$上时，$\frac{FT}{CP}$此时有最大值，最大值为$\frac{FQ+TQ}{CP}$，据此代值计算即可．

【详解】（1）证明：$\because \angle ACB=90^\circ$，$BD\,//\,AC$，

$\therefore \angle CBD=180^\circ-\angle ACB=90^\circ$，

$\because AE\perp CD$，

$\therefore \angle ACD+\angle CAE=90^\circ$，

$\because \angle ACD+\angle BCD=90^\circ$，

$\therefore \angle CAE=\angle BCD$，

又$\because AC=CB$，$\angle CBD=\angle ACE=90^\circ$，

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle CBD(\text{ASA})$，

$\therefore BD=CE$，

$\because$点$E$是$BC$的中点，

$\therefore BC=2CE=2BD$，

$\therefore AC=2BD$；

（2）证明：如图所示，过点$G$作$GH\perp AB$于$H$，连接$HF$，

$\because BD\,//\,AC$，

$\therefore \angle FBD=\angle FGA$，$\angle D=\angle FAG$，

$\because$点$F$是$AD$的中点，

$\therefore AF=DF$，

$\therefore \triangle AGF\cong\triangle DBF(\text{AAS})$，

$\therefore AG=BD$，$BF=GF$，

$\because AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \angle CAB=\angle ACB=45^\circ$，

$\because GH\perp AH$，

$\therefore \triangle AHG$是等腰直角三角形，

$\therefore AH=\frac{\sqrt{2}}{2}AG=\frac{\sqrt{2}}{2}BD$；

$\because \angle BHG=\angle BCG=90^\circ$，$BF=GF$，

$\therefore FH = FC = BF = \frac{1}{2}BG$ ，

$\therefore \angle FBH = \angle FHB$，$\angle FBC = \angle FCB$，

$\therefore \angle GFH = \angle FBH + \angle FHB = 2\angle FBH$，$\angle GFC = \angle FBC + \angle FCB = 2\angle FBC$，

$\therefore \angle HFC = \angle GFH + \angle GFC = 2\angle FBH + 2\angle FBC = 2\angle ABC = 90^\circ$，

$\because FM \perp BG$，

$\therefore \angle BFM = 90^\circ$，

$\therefore \angle HFM = \angle CFN$；

设$\angle CBG = x$，则$\angle ABG = 45^\circ - x$，$\angle CGB = 90^\circ - x$，

$\therefore \angle HMF = \angle BFM + \angle FBM = 135^\circ - x$，

$\because CN$平分$\angle ACB$，

$\therefore \angle GCN = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$，

$\therefore \angle CNF = \angle CGN + \angle GCN = 135^\circ - x$，

$\therefore \angle HMF = \angle CNF$，

$\therefore \triangle HFM \cong \triangle CFN(\mathrm{AAS})$，

$\therefore HM = CN$，

$\because AM = AH + HM$，

$\therefore AM = \frac{\sqrt{2}}{2}BD + CN$；

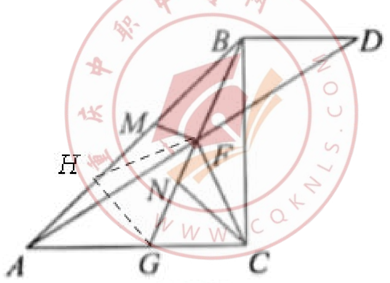



图2

（3）解：如图所示，过点$D$作$DH \perp AC$交$AC$延长线与$H$，连接$FH$，

$\because BD // AC$，$\angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore \angle BCH = \angle CBD = 90^\circ$，

$\because DH \perp AC$，

$\therefore$四边形$BCHD$是矩形，

$\therefore BC = DH = AC$，

∵点$F$是$AD$的中点，且$AF=AC$，

∴$AD=2AF=2DH=2FH=2DF$，

∴$\triangle FDH$是等边三角形，

∴$\angle DFH=\angle FDH=60°$，

∴$\angle BDA=\angle DAH=30°$，

∴$\angle FHA=\angle FAH=30°$，

由旋转的性质可得$FQ=FP$，$\angle PFQ=60°=\angle DFH$，

∴$\angle DFQ=\angle HFP$，

∴$\triangle DFQ\cong\triangle HFP(\mathrm{SAS})$，

∴$\angle FDQ=\angle FHP=30°$，

∴点$Q$在直线$DQ$上运动，

设直线$DQ$交$FH$于$K$，则$DK\perp FH$，$FK=\frac{1}{2}FH$，$\angle FDK=\frac{1}{2}\angle FDH=30°$，

∴$\angle BDQ=60°$，

由垂线段最短可知，当$BQ\perp DQ$时，$BQ$有最小值，

∴$\angle DBQ=30°$，

设$AC=DH=6a$，则$AH=\sqrt{3}DH=6\sqrt{3}a$，

∴$BD=CH=AH-AC=6\sqrt{3}a-6a$，

∴$DQ=\frac{1}{2}BD=3\sqrt{3}a-3a$，

∴$BQ=\sqrt{3}DQ=9a-3\sqrt{3}a$；

在$\mathrm{Rt}\triangle DFK$中，$FK=\frac{1}{2}FH=\frac{1}{2}DH=3a$，

∴$DK=\sqrt{DF^2-FK^2}=3\sqrt{3}a$，

∴$QK=DK-DQ=3a$，

在$\mathrm{Rt}\triangle FQK$中，由勾股定理得$FQ=\sqrt{FK^2+QK^2}=3\sqrt{2}a$；

∵$\triangle DFQ\cong\triangle HFP$，

∴$PH=DQ=3\sqrt{3}a-3a$，

∴$CP=CH-PH=3\sqrt{3}a-3a$；

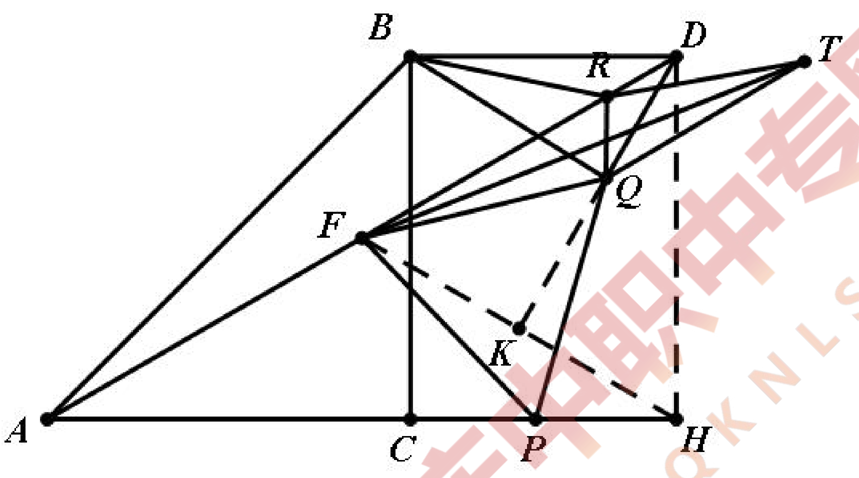
由折叠的性质可得$TQ=BQ=9a-3\sqrt{3}a$，

$\because FT\le FQ+TQ$，

$\therefore \dfrac{FT}{CP}\le\dfrac{FQ+TQ}{CP}$，

$\therefore$当点$Q$在线段$FT$上时，$\dfrac{FT}{CP}$此时有最大值，最大值为$\dfrac{FQ+TQ}{CP}$，

$\therefore \dfrac{FT}{CP}$的最大值为$\dfrac{FQ+TQ}{CP}=\dfrac{3\sqrt{2}a+9a-3\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}a-3a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$.




【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，勾股定理，等边三角形的性质与判定，等腰直角三角的性质与判定，旋转的性质，折叠的性质，垂线段最短，矩形的性质与判定等等，解（2）的关键在于作出辅助线证明$\triangle HFM\cong\triangle CFN\left(\text{AAS}\right)$，得到$HM=CN$；解（3）的关键在于通过手拉手模型证明点$Q$的运动轨迹是直线，从而根据垂线段最短确定点$Q$的位置.